

### Solution : (le dernier exercice)

1)  $n=25$  ;  $p=0,07$

2) Espérance mathématique :

$$E(X)=n \cdot p=25 \times 0,07=1,75$$

$$\text{Ecart type : } \sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{25 \times 0,07 \times 0,93} = 1,27$$

3) Qu'il est la probabilité de tomber sur 2 fromages non conforme .

$$(P(X=k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k})$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= C_{25}^2 \times 0,07^2 \times 0,93^{23} \quad (n=25 ; p=0,07 ; q=0,93) \\ &= 300 \times 0,07^2 \times 0,93^{23} = 0,28 \end{aligned}$$

4) Calculer la probabilité de tomber au maximum sur 2 fromages non conforme.

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$\begin{aligned} &= C_{25}^0 \times 0,07^0 \times 0,93^{25} + C_{25}^1 \times 0,07^1 \times 0,93^{24} + 0,28 \\ &= 0,16 + 0,31 + 0,28 \\ &= 0,75 \end{aligned}$$

Il y a 75% de chance de tomber sur au maximum 2 fromages défectueux parmi 25

5)  $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$   
 $= 1 - 0,75 = 0,25$

6) la probabilité de tomber sur 3 à 5 fromages non conforme revient à calculer

$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

7)  $P(X=0)$  correspond à aucun fromage non conforme

$$P(X=0) = 0,1$$

$$\Rightarrow C_n^0 \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,1$$

$$\Rightarrow 0,93^n = 0,1$$

$$\ln(0,93^n) = \ln(0,1)$$

$$n \ln(0,93) = \ln(0,1)$$

$$\Rightarrow n=32$$

# Lois Discrètes Usuelles : Loi Géométrique

- Soient **E** l'expérience de Bernoulli et **A** l'événement « succès » de probabilité **p**.

La probabilité  $\bar{A}$  est égale à **q = 1-p**.

- On répète l'expérience **E** **n fois** dans **les mêmes conditions** et d'une manière **indépendante** l'une aux autres.
- Soit **X** = « le nombre d'expérience **E** avant l'obtention de l'événement **A** pour la première fois ».

# Lois Discrètes Usuelles : Loi de Géométrie

- $p[X = k]$  représente la probabilité que l'événement A se produit pour la première fois durant la  $k^{\text{ème}}$  expérience.
- Les  $(k-1)$  expériences précédentes ont pour résultat l'événement contraire  $\bar{A}$
- Comme les expériences sont indépendantes, alors  $p[X = k] = q^{k-1} p$

On écrit  $X \rightarrow G(p)$

**Les propriétés de X sont :**

- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

# Lois Discrètes Usuelles : Loi de Géométrie

## Exemple

On lance un dé plusieurs fois jusqu'à l'apparition de la face N°1. Quelle est la probabilité d'obtenir la face N°1 pour la première fois au 20<sup>ème</sup> lancer.

Soit  $X$  le nombre de lancers nécessaires pour obtenir la face N°1 pour la première fois.

On a :  $A = \{1\}$  et  $\bar{A} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Alors  $p(A) = \frac{1}{6}$  et  $p(\bar{A}) = \frac{5}{6}$  Donc:

$$p[X = 20] = p\left(\underbrace{\bar{A} \text{ et } \bar{A} \text{ et } \dots \text{ et } \bar{A}}_{19. \text{ fois}}; \text{ et } A\right) = \underbrace{p(\bar{A}) \times p(\bar{A}) \times \dots \times p(\bar{A})}_{19. \text{ fois}} \times p(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^{19} \times \frac{1}{6}$$

# Lois Discrètes Usuelles: Loi de Poisson

- La loi de Poisson est utilisée lorsque il s'agit d'étude d'un phénomène durant un laps infiniment petit. Elle est utilisée aussi dans les phénomènes d'attentes , les contrôles de qualité et en assurance.
- Une variable aléatoire discrète  $X$  suit **une loi de Poisson** si : 
$$p(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$
 où  $\lambda$  est un paramètre positif. On écrit  $X \sim P(\lambda)$ .

## Les propriétés de $X$ sont :

- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

# Lois Discrètes Usuelles: Loi de Poisson

## Exemple

Soit  $X$  le nombre des arrivées des clients à un guichet bancaire.

Supposons que  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre 4.

Calculer les probabilités suivantes :

- a) aucun client n'arrive au guichet,
- b) plus de 2 clients arrivent au guichet,
- c) entre 3 et 7 clients arrivent au guichet.

a)

$$p\{X = 0\} = \frac{e^{-4} 4^0}{0!} = e^{-4} = 0,018$$

# Lois Discrètes Usuelles: Loi de Poisson

b)

$$\begin{aligned} p\{X \geq 3\} &= 1 - p[X \leq 2] \\ &= 1 - [p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2]] \\ &= 0,762 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} p\{3 \leq X \leq 7\} &= p[X \leq 7] - p[X \leq 3] \\ &= p[X = 4] + p[X = 5] + p[X = 6] + p[X = 7] \\ &= 0,711 \end{aligned}$$

**Exercice avec solution .**

Exemple: Loi Géométrique

Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules rouges.

On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule jusqu'obtenir une boule blanche.

$X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p = \frac{4}{10} = 0,4$

$$P(X = k) = 0,6^{k-1} \times 0,4$$

$$P(X = 1) = 0,6^0 \times 0,4$$

$$P(X = 2) = 0,6^1 \times 0,4$$

$$P(X = 3) = 0,6^2 \times 0,4$$

$$P(X = 15) = 0,6^{14} \times 0,4$$

$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

**Exercice 2.** Lors d'une enquête, on a interrogé 5 hommes et 3 femmes. On choisit au hasard et sans remise les personnes une à une jusqu'à obtention d'un homme. Soit  $X$  le nombre de tirages nécessaires.

1- Déterminer les valeurs de  $X$  et sa loi de probabilité.

2- Calculer l'espérance et l'écart-type de  $X$ .

**Exercice 3.** Une urne contient une boule blanche et une boule noire.

On effectue des tirages avec remise jusqu'obtention d'une boule blanche. 1- Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

2-Calculer  $P(X = 3)$

**Exercice 4.** Vous avez besoin d'une personne aider de ménager. Quand vous téléphonez un ami, il y a une chance sur quatre qu'il accepte.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui représente le nombre d'amis que vous devrez contacter pour obtenir cette aide.

1- Déterminer la loi de probabilité de  $X$

2-Calculer  $P(X = 4); P(X < 4)$

**Exercice 5.** On admet que le nombre  $X$  d'accident survenant annuellement dans une grande entreprise obéit une loi de poisson de paramètre 3

Calculer la probabilité des événements suivants:

1- aucun accident ne survient pendant l'année

2- au moins 4 accidents surviennent dans l'année

3-moins de 4 accidents surviennent dans l'année

**Exercice 6.** La moyenne des voitures qu'elles déclarent un accident pendant une journée dans une poste de police est de 4 voitures .

1- déterminer de quelle loi s'agit-elles?

2- calculer la probabilité pour que au plus une voiture déclare un accident.

3- calculer la probabilité pour que au moins 2 voitures déclarent un accident.